SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN SAINS
"Pengembangan Model dan Perangkat Pembelajaran
untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi"
Magister Pendidikan Sains dan Doktor Pendidikan IPA FKIP UNS
Surakarta, 19 November 2015

MAKALAH PENDAMPING	**Artikel Penelitian Bidang Fisika, Kimia, Biologi, dan IPA (Murni)**	**ISSN: 2407-4659**

SOLUSI PERSAMAAN DIRAC BAGIAN RADIAL PADA KASUS PSEUDOSPIN SIMETRI UNTUK POTENSIAL POSCH-TELLER HIPERBOLIK TERDEFORMASI-Q MENGGUNAKAN METODE ITERASI ASIMTOTIK

Yuniar Alam[1], Suparmi[2], Cari[3]
[1]*Program Studi Ilmu Fisika Pascasarjana, Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami 36A Kentingan Surakarta, 57126, Indonesia*
[2,3]*Jurusan Fisika FMIPA, Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami 36A Kentingan Surakarta, 57126, Indonesia*

Email korespondensi : yuniar_fis08@ymail.com

Abstrak

Persamaan Dirac untuk potensial Posch-Teller hiperbolik terdeformasi-q pada kasus pseudospin simetri bagian radial diselesaikan secara analitik dengan menggunakan metode Iterasi Asimtotik. Penyelesaian persamaan Dirac dengan menggunakan metode Iterasi Asimtotik dilakukan dengan mereduksi persamaan differensial orde kedua menjadi persamaan differensial tipe Hipergeometri dengan cara substitusi variabel sehingga diperoleh persamaan energi relativistik. Energi relativistik dihitung menggunakan software matlab 2013. Penelitian ini dibatasi untuk kasus pseudospin simetri bagian radial.

Kata kunci : Persamaan Dirac, Potensial Posch-Teller Hiperbolik terdeformasi-q, Pseudospin-Simetri, Metode Iterasi Asimtotik.

I. PENDAHULUAN

Pada tahun 1928 ilmuan fisika Inggris bernama Paul Dirac meneliti persamaan gelombang kovarian relativistik yang dikenal dengan persamaan Dirac. Persamaan Dirac mendeskripsikan tentang perilaku benda–benda subatomik yang ber-spin ½ pada elektron untuk potensial *shape invariance* sentral maupun non-sentral (Greiner, 2000).

Penyelesaian persamaan Dirac secara langsung dari sistem partikel dengan menentukan energi dan fungsi gelombang suatu partikel dipengaruhi oleh potensial yang energi potensialnya merupakan fungsi posisi. Penyelesaian persamaan Dirac dapat diselesaikan dengan cara mereduksi persamaan Dirac menjadi persamaan Differensial Orde Dua.

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Dirac antara lain metode Supersimetri (Suparmi dan Cari, 2014), metode Nikiforov-Uvarov (Cari and Suparmi, 2012.), Polinomial Romanovski (A. Suparmi, dkk, 2014) dan Metode Iterasi Asimptotik (Rostami, A, 2008).

Pada paper ini menggunakan metode yang berbeda dari penelitian sebelumnya. Paper ini menyajian penyelesaian persamaan Dirac untuk potensial Posch-Teller terdeformasi-q pada kasus pseuspin simetri bagian radial menggunakan metode iterasi asimtotik. Metode iterasi asimtotik adalah sebuah metode yang menggunakan penyelesaian persamaan diferensial orde kedua (Falaye, dkk, 2012).

IV. METODE ITERASI ASIMPTOTIK

Metode iterasi asimtotik adalah metode yang di gunakan untuk memperoleh solusi eksak dari differensial homogen linier orde dua:

$$y_n''(x) - \lambda_o(x) y_n'(x) + s_o(x) y_n(x) = 0 \tag{1}$$

Dimana $\lambda_o \neq 0$ dan $s_o(x)$ turunan pertama yang menunjukkan hubungan dengan *x*, parameter lain yaitu *n* diartikan sebagai sebuah bilangan kuantum radial. Untuk memperoleh sebuah solusi umum pada persamaan ini, didiferensialkan Persamaan (1) yang bergantung terhadap *x*, diperoleh

$$y_n''' = \lambda_1(x) + s_1(x) y_n(x) \tag{2}$$

Jika didefenisikan

$$\lambda_k(x) = \lambda_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_{k-1}\lambda_o(x) \tag{3}$$

$$s_k(x) = s_{k-1}'(x) + s_o(x)\lambda_{k-1}(x) \tag{4}$$

$k = 1,2,3, \ldots$

$$\lambda_i(x) s_{i-1}(x) - \lambda_{i-1}(x) s_i(x) = 0 = \Delta_i, i = 1,2,3 \ldots.. \tag{5}$$

dengan $\lambda_o(x) \neq 0$ dan $s_o(x)$ merupakan fungsi dari c∞ (koefisien persamaan diferensial). Metode iterasi asimtotik diaplikasikan secara langsung pada beberapa permasalahan jika sebuah fungsi gelombang diketahui terlebih dahulu dan memenuhi kondisi batas nol (0) dan titik tak hingga (∞).

Dari persamaan (2) akan diperoleh hubungan:

$$\frac{y_n^{(k+2)}(z)}{y_n^{(k+1)}(z)} = \frac{\lambda_k(z)\left[y_n' + \dfrac{s_k(z)}{\lambda_k(z)} f(z)\right]}{\lambda_{k-1}(z)\left[y_n' + \dfrac{s_{k-1}(z)}{\lambda_{k-1}(z)} f(z)\right]}$$

(6)

dengan menggunakan aspek asimtotik untuk *k* cukup besar, yaitu:

$$\frac{s_k(z)}{\lambda_k(x)} = \frac{s_{k-1}(z)}{\lambda_{k-1}(x)} = \alpha(z)$$

(7)

Sedangkan eigen fungsi untuk Persamaan (1) dapat diselesaikan menggunakan (Soylu, dkk, 2008):

$$y_n(x) = C' e^{-\int \alpha_n(x)dx}$$

(8)

Bentuk lain dari persamaan (1) dituliskan sebagai berikut

$$y''(x) = 2\left(\frac{tx^{N+1}}{1-bx^{N+2}} - \frac{c+1}{x}\right)y'(x) - \frac{wx^n}{1-bx^{N+2}}$$

(9)

Persamaan (9) merupakan persamaan differensial tipe AIM yang akan digunakan untuk menentukan persamaan fungsi gelombang persamaan Dirac. Persamaan (9) dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan:

$$y_n(x) = (-1)^n C' (N+2)^n (\sigma)_n {}_2F_1\left(-n, p+n, \sigma, bx^{N+2}\right)$$

(10)

Dengan

$$(\sigma)_n = \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma)}$$

(11)

$$\sigma = \frac{2c+N+3}{N+2}$$

(12)

Dan

$$p = \frac{(2c+1)b+2t}{(N+2)b}$$

(13)

Disini C' adalah konstanta normalisasi radial dan ${}_2F_1$ merupakan fungsi hipergeometri.

V. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Persamaan Schrodinger relativistik disebut sebagai persamaan Klien Gordon untuk spin bilangan bulat dan persamaan Dirac untuk spin ½. Deskripsi secara kuantitatif gerak partikel relativistik yang dipengaruhi oleh gaya medan yang direfresentasikan sebagai energi potensial partikel yang berspin ½ tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial yang disebut sebagai persamaan Dirac. Persamaan Dirac untuk potensial vektor V(r) dan skalar S(r) satu dimensi adalah (Eshghi dan Hamzavi, 2012).

$$\{c.\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta(Mc^2 + s(r))\}\psi(r) = \{E - v(r)\}\psi(r)$$

(14)

Dengan M massa relativistik partikel, E energi total, dan $\vec{p}$ operator momentum linier, nilai α dan β dinyatakan dalam persamaan

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

(15)

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(16)

Dengan $\vec{\alpha}$ matrik Pauli *I* matrik identitas 2x2

$$\vec{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \vec{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(17)

Spin dirac dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} f_{nk}(r) \\ g_{nk}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_{nk}(r)}{r} Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi) \\ i\frac{G_{nk}(r)}{r} Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

(18)

Dengan $F_{nk}(r)$ adalah komponen spin Dirac *upper* dan $G_{nk}(r)$ adalah komponen pseudospin Dirac *lower*. $Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi)$ adalah spin bola harmonik, *l* adalah bilangan kuantum orbital dan $\tilde{l}$ adalah bilangan kuantum pseudospin orbital, *m* adalah proyeksi momentum sudut pada sumbu *z* (Hamzavi & Rajabi, 2013).

Dengan subsitusi persamaan (18) kedalam persamaan (14), diperoleh

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)F_{nk}(r) = \left(E - V(\vec{r}) + Mc^2 + S(\vec{r})\right)G_{nk}(r)$$

(19)

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)G_{nk}(r) = \left(E - V(\vec{r}) - Mc^2 - S(\vec{r})\right)F_{nk}(r)$$

(20)

Setelah eliminasi $F_{nk}(r)$ dan $G_{nk}(r)$ dari persamaan (19) dan persamaan (20), diperoleh dua persamaan diferensial yang mirip dengan persamaan schrodinger untuk komponen $F_{nk}(r)$ dan komponen $G_{nk}(r)$.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{k(k+1)}{r^2}\right)F_{nk}(r)+\left(E+Mc^2\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)F_{nk}(r)=\left[\left(E+Mc^2\right)\left(E-Mc^2\right)\right]F_{nk}(r)$$

(21)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{k(k-1)}{r^2}\right)G_{nk}(r)+\left(Mc^2+E\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)G_{nk}(r)=$$
$$\left[\left(E-2V(\vec{r})-Mc^2\right)\left(E-Mc^2\right)\right]G_{kr}(r)$$

(22)

Dengan $S(\vec{r})=V(\vec{r})$

(23)

Solusi Persamaan Dirac untuk Potensial Posch-Teller Terdeformasi-q pada kasus Pseudospin Simetri Bagian Radial

Berdasarkan Soylu, dkk (2007) persamaan Dirac untuk kasus pseudospin simetri jika $S(\vec{r})=V(\vec{r})$ sehingga persamaannya menjadi;

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{k(k-1)}{r^2}(E+M)\left(E^2-M^2\right)\right]G_{nk}(r)=0$$

(24)

Untuk potensial Posch-Teler terdeformasi-q didefenisikan sebagai berikut (Falaye, dkk, 2013),

$$V_{PT}(r)=\alpha^2\left(\frac{v_o}{\sinh_q^2\alpha r}+\frac{v_1}{\cosh_q^2\alpha r}\right)$$

(25)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-[E+M]\alpha^2\left(\frac{v_o}{\sinh_q^2\alpha r}+\frac{v_1}{\cosh_q^2\alpha r}\right)+\left[E^2-M^2\right]-l(l-1)\right)\frac{G_{nk}(r)}{r^2}=0$$

(24)

Dengan subsitusi variabel $\cosh_q^2\alpha r=z$ pada persamaan (24) dan juga dimisalkan $\frac{1}{r^2}\cong\frac{\alpha^2}{\sinh_q^2\alpha r}$, maka diperoleh bentuk persamaan

$$z(q-z)\frac{d^2G_{nk}(r)}{dr^2}+\frac{1}{2}(q-2z)\frac{dG_{nk}(r)}{dr}-\left\{[E+M]\left(\frac{v_o}{4(q-z)}+\frac{v_1}{4z}\right)-\frac{\left[E^2-M^2\right]}{4\alpha^2}-\frac{l(l-1)}{4(q-z)}\right\}G_{nk}(r)=0$$

(25)

Selanjutnya persamaan (25) direduksi menjadi persamaan ini tipe hipergeometri melalui pemisalan fungsi gelombang.

$$F_{nk}(z)=z^{\xi}(q-z)^{\chi}f$$

(26)

Setelah manipulasi persamaan (25) dan (26), didapatkan

$$f'' = \left(\frac{(2\xi + 2\chi + 1)z - \left(2\xi + \frac{1}{2}\right)q}{z(q-z)} \right) f' + \left(\frac{\frac{[E^2 - M^2]}{4\alpha^2} + (\xi + \chi)^2}{z(q-z)} \right) f$$

(27)

Persamaan (27) merupakan persamaan orde dua. Dengan membandingkan persamaan (27) dengan persamaan (1), dapat dituliskan λ_o dan s_o, kemudian dapat dihitung λ_k dan s_k.

$$\lambda_o = \frac{\left((2\xi + 2\chi + 1)z - \left(2\xi + \frac{1}{2}\right)q\right)}{z(q-z)}$$

$$s_0 = \frac{\left((\xi + \chi)^2 + \frac{[E^2 - M^2]}{4\alpha^2}\right)}{z(q-z)}$$

$$\lambda_1 = \left[\frac{\left(2\xi + \frac{1}{2}\right)}{z^2} + \frac{\left(2\chi + \frac{1}{2}\right)}{(q-z)^2} \right] + \left[-\frac{\left(2\xi + \frac{1}{2}\right)}{z} + \frac{\left(2\chi + \frac{1}{2}\right)}{(q-z)} \right]^2 + \left[\frac{C}{z} + \frac{C}{(q-z)} \right]$$

$$s_1 = \left[\frac{C}{z^2} + \frac{C}{(q-z)^2} \right] + \left[\frac{C}{z} + \frac{C}{(q-z)} \right] \left[-\frac{\left(2\xi + \frac{1}{2}\right)}{z} + \frac{\left(2\chi + \frac{1}{2}\right)}{(q-z)} \right]$$

Dengan mengkombinasikan hasil di atas dengan persamaan (5), diperoleh

$$\Delta_o = s_o\lambda_1 - s_1\lambda_o = 0 \rightarrow \varepsilon_o = (\xi + \chi)^2$$

$$\Delta_1 = s_1\lambda_2 - s_2\lambda_1 = 0 \rightarrow \varepsilon_1 = (\xi + \chi + 1)^2$$

$$\Delta_2 = s_2\lambda_3 - s_3\lambda_2 = 0 \rightarrow \varepsilon_2 = (\xi + \chi + 2)^2$$

(28)

Dan seterusnya, dengan $\varepsilon_r = (M^2 - E^2)\frac{1}{4\alpha^2}$

Dari persamaan (33), dapat diregenerasasikan menjadi

$$\varepsilon = (\xi + \chi + n_r)^2$$

(29)

Dengan n_r adalah bilangan kuantum radial, sehingga energi eigen adalah

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2} q \sqrt{[E+M]v_1 + \frac{1}{4} q} \pm \frac{1}{2} q \sqrt{[E+M]v_o + l(l+1) + \frac{1}{4} q} + n_r + \frac{1}{2} q^2 \right)^2$$

(30)

$$\left(M^2 - E^2\right) \frac{1}{4\alpha^2} = \left(\frac{1}{2} q \sqrt{[E+M]v_1 + \frac{1}{4} q} \pm \frac{1}{2} q \sqrt{[E+M]v_o + l(l+1) + \frac{1}{4} q} + n_r + \frac{1}{2} q^2 \right)^2$$

(31)

l adalah bilangan kuantum orbital untuk solusi bagian radial. Dan kemudian, fungsi gelombang bagian radial dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (10), Persamaan (11), Persamaan (12) dan Persamaan (13):

$$c = \xi + \frac{3}{4};\; t = \chi + \frac{1}{4};\; N = -1;\; b = 1$$

$$\sigma = 2\xi + \frac{1}{2}$$

$$p = 2\xi + 2\chi$$

Sedangkan untuk fungsi f

$$f = (-1)^n C^{'} (1)^{n_r} \left(2\xi + \frac{1}{2}\right)_{nr} {}_2F_1\left(-n_r, 2\xi + 2\chi + n_r, 2\xi + \frac{1}{2}, q\right)$$

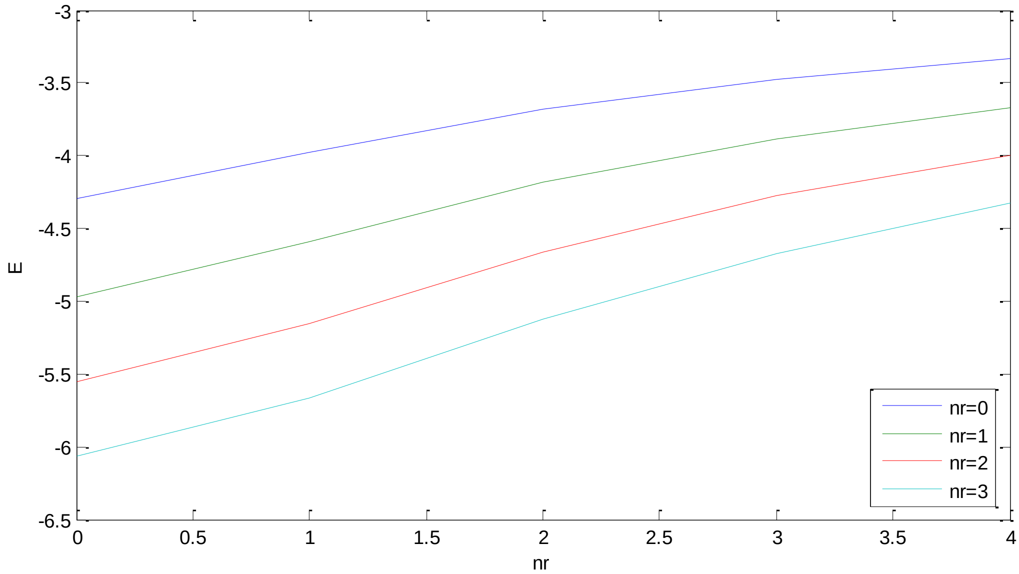
(32)

Sehingga dapat dituliskan total fungsi radial

$$F = Z^{\xi} (q-z)^{\chi} (-1)^n C^{'} (1)^{n_r} \left(2\delta + \frac{1}{2}\right)_{nr} {}_2F_1\left(-n_r, 2\delta + 2\gamma + n_r, 2\delta + \frac{1}{2}, q\right)$$

(33)

Energi pada tabel 1 dapat digambarkan grafiknya seperti gambar 1.



Gambar 1. Hasil perhitungan spektrum energi untuk kasus simetri pada n_r tertentu.

Hasil energi yang diperoleh untuk kasus spin simetri dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Spektum energi potensial Posch-Teller terdeformasi-q untuk kasus spin simetri dengan $M = 5; v_1 = 1; v_2 = 2; \alpha = 0{,}75$.

Untuk k=l			Enk
l	n	k	
0	0	0	-4.298587
1	0	1	-3.976279
2	0	2	-3.683051
3	0	3	-3.479201
4	0	4	-3.337597
0	1	0	-4.974610
1	1	1	-4.592405
2	1	2	-4.184309
3	1	3	-3.881839
4	1	4	-3.668340
0	2	0	-5.552290
1	2	1	-5.152351
2	2	2	-4.666677
3	2	3	-4.278882
4	2	4	-3.997519
0	3	0	-6.060923
1	3	1	-5.661396
2	3	2	-5.127042
3	3	3	-4.668299
4	3	4	-4.324154

VI. SIMPULAN, SARAN, DAN REKOMENDASI

Persamaan Dirac untuk potensial Posch-Teller Hiperbolik Terdeformasi-q pada kasus pseudospin simetri bagian radial dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Iterasi Asimtotik (AIM). Spektrum energi relativistik sistem dihitung menggunakan software Matlab 2013.

VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didukung oleh Hibah Penelitian Utama (PUT UNS) 2015 dari DIKTI dengan Nomor Kontrak No. 698/UN27.11/PN/2015.

VIII. DAFTAR PUSTAKA

Cari and Suparmi. 2012. Approximate Solution of Schrodinger Equation for Trigonometric Scarf Potential with the Pöschl-Teller Non-central potential Using NU Method, *IOSR Journal of Applied Physics (IOSR-JAP)* ISSN: 2278-4861, vol, 2, Issue 3, 2012, pp, 13- 23.

Eshghi, M., Hamzavi, M., 2012. Spin Symetry in Dirac-attractive Radial Problem and Tensor Potential. *Chinese Physical Society and IOP Publishing Ltd, Vol. 57, No.3.*

Falaye, Babatunde J., Hamzavi, M., Ikhdair S, M., 2012. Approximate Bound State Solutions of the Deformed Woods-Saxon Potensial Using Asympototic Iteration Method. *Chinese Physics Letters, arXiv*: 1207.128v1 nucl-th.

Greiner, A. 2000. *Relativistic Quantum Mechanics.* Tihrd Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Hamzavi M, Rajabi A A. 2013. *Spin and Pseudospin Symmetries with Trigonometric Poschl-Teller Potensial Hindawi Publishing Corporation Advances in High Energy Physics*.

Ikhdair, Sameer M., Falaye, Babatunde J., 2013. Approximate Analitical Solutions to Relativistic and Nonrelativistic Posch-Teller Potential with its Thermodynamic Properties. *Chinese Physics Latter*, arxiv:1308.0155v1 quant-ph.

Rostami, A. 2008. Asymptotic Iteration Method: A Powerful Approach for Analysis of Inhomogeneous Dielectric Slab Waveguides, *Progress in Electromagnetics Research*, vol, 4, 2008, pp, 171-182.

Soylu, A. Bayrak, O. Boztosun, I. 2007. An Approximate Solution of Dirac Hulthén Problem with Pseudospin and Spin Symmetry for Any K State. *Journal of Mathematical Physics* 48.

Soylu, A. Bayrak, O. Boztosun, I. 2008. K State Solutions of the Dirac Equation for The Eckart Potential with Pseudospin and Spin Symmetry. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoritical* 41 (2008) 065308 (8pp).

Suparmi & Cari. 2014. Bound State Solution of Dirac Equation for GeneralizedPöschl-Teller plus Trigomometric Pöschl-Teller Non-Central Potential Using SUSY Quantum Mechanics, *ITB Journal Publisher*, ISSN: 2337-5760.

Suparmi, A, C,Cari, and L,M,Anggraini. 2014. Bound State Solution of Dirac Equation for Hulthen Plus Trigonometric Rosen Morse Non-Central Potential Using Romanovski Polynomial. *AIP Conference Proceedings*, 1615 (2014) 111.

PERTANYAAN

No	Penanya /Instansi	Pertanyaan	Jawaban
1.	Endang Setyaningsih S.Si, M.Si Biologi FKIP UMS	persamaan dirac untuk menghitung apa?	untuk menghitung frekuensi gelombang dan energi