ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI LINIER SEDERHANA *BAYES* DENGAN DISTRIBUSI *PRIOR* NONINFORMATIF JEFFREY

Firda Amalia[1], Dewi Retno Sari Saputro[2], Triwik Jatu[3]

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika FMIPA UNS
[2,3]Pengajar Program Studi Matematika FMIPA UNS
firdaamalia021@gmail.com

Abstrak: Tujuan utama dalam memodelkan data observasi dengan model regresi adalah mengestimasi parameternya. Pendugaan parameter dapat berupa pendugaan parameter titik dan interval. Pendugaan parameter titik dapat dilakukan dengan dua metode, yang pertama disebut sebagai pendekatan klasik (*frequentist*). Salah satu teknik yang dipergunakan dalam metode klasik adalah metode maksimum *likelihood*. Pendekatan kedua, dikenal sebagai *bayesian*. *Bayesian*, selain memanfaatkan proses inferensi pada data sampel yang diambil dari populasi, juga mempertimbangkan distribusi awal (distribusi *prior*). Dalam metode Bayes parameter dianggap sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut sebagai distribusi *prior*. Setelah pengamatan dilakukan, informasi dalam distribusi *prior* dikombinasikan dengan informasi dengan data *sampel* melalui teorema Bayes, dan hasilnya dinyatakan sebagai distribusi *posterior*. Secara umum pemilihan distribusi *prior* dilakukan atas dasar diketahui atau tidaknya informasi tentang parameter. Dalam artikel ini dibahas estimasi parameter model regresi linier pada pola distribusi *prior* yakni apabila informasi tentang parameter tidak tersedia, digunakan *prior* noninformatif Jeffrey. *Prior* noninformatif ini tidak memberikan pengaruh signifikan terhadap distribusi sehingga informasi yang diperoleh dari data amatan bersifat lebih objektif.

Kata kunci: Regresi Bayesian, Estimasi Parameter, Distribusi Prior, Prior Noninformatif.

PENDAHULUAN

Model regresi adalah model yang memberikan gambaran tentang hubungan antara variabel bebas dan variabel tak bebas yang dipengaruhi oleh beberapa parameter regresi yang belum diketahui nilainya sehingga diperlukan untuk mengestimasinya (Sembiring, 1995). Menurut (Bolstad, 2007), terdapat dua metode yang pada umumnya dipergunakan untuk mengestimasi parameter. Metode yang pertama adalah metode klasik (metode kuadrat terkecil dan metode *maximum likelihood*). Metode tersebut menggunakan pendekatan statistika klasik dimana pendugaan parameter dan inferensinya berdasarkan informasi yang ada sampel dan mengabaikan informasi awal (*prior*) peneliti. Prosedur tersebut dikembangkan hanya dengan melihat performa seluruh kemungkinan sampel acak (*all possible random sample*) saat ini. Informasi sampel acak yang diperoleh sebelumnya (pada percobaan/observasi lain di masa lalu) diabaikan. Pendekatan klasik ini memiliki kelemahan dalam hal interpretasi terhadap selang kepercayaan distribusi parameter (Casella and Berger, 2002).

Metode yang kedua adalah metode *bayesian* yang merupakan metode pendugaan yang menggabungkan distribusi *prior* dan distribusi sampel. Distribusi *prior* adalah distribusi awal yang memberikan informasi tentang parameter. Distribusi sampel yang digabungkan dengan distribusi *prior* menghasilkan distribusi baru yaitu distribusi *posterior* yang menyatakan derajat keyakinan seseorang tentang posisi parameter setelah sampel diamati (Walpole and Myers, 1995).

Pada parameter regresi, terkadang diperoleh informasi tambahan parameter populasi yang berasal dari data sebelumnya. Jika informasi tersebut menjadi faktor pertimbangan pada analisis data, maka estimasi dengan metode kuadrat terkecil tidak dapat dipergunakan. Oleh karena itu, diperlukan metode *bayesian* untuk mengestimasi parameter regresinya.

Metode *bayesian*, selain memanfaatkan proses inferensi pada data sampel yang diambil dari populasi, juga mempertimbangkan distribusi awal (distribusi *prior*). Dalam metode Bayes parameter dianggap sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam distribusi yang disebut distribusi *prior*. Setelah pengamatan dilakukan, informasi dalam distribusi *prior* dikombinasikan dengan informasi dengan data sampel melalui teori Bayes, dan hasilnya dinyatakan sebagai distribusi *posterior* yang akan menentukan estimasi parameter (Soejoeti dan Subanar, 1988).

Analisis regresi linier sederhana *bayesian* dipengaruhi oleh pemilihan *prior* dan informasi sampel. Pemilihan *prior* secara umum dilakukan berdasarkan diketahui atau tidaknya informasi parameter. Jika informasi parameter diketahui, maka dapat digunakan *prior* informatif. *Prior* informatif mempengaruhi distribusi *posterior* dan bersifat sangat subjektif (Gelman,*et al*, 2004). Sebaliknya, jika informasi parameter tidak diketahui, maka dapat digunakan *prior* noninformatif. *Prior* noninformatif ini tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap distribusi *posterior* sehingga informasi yang diperoleh dari data amatan bersifat lebih objektif (Box dan Tiao, 1973). Salah satu *prior* noninformatif adalah *prior* Jeffrey. *Prior* Jeffrey adalah salah satu jenis *prior* noninformatif apabila informasi awal tentang parameter distribusi sangat kurang (Al-Kutubi and Ibrahim, 2009). Kajian yang terkait dengan penelitian ini adalah Nurlaila dkk. pada tahun 2013, yang menyatakan bahwa metode *bayesian* dengan perluasan distribusi *prior* Jeffrey lebih efektif dibandingkan dengan metode MLE. Penelitian lainnya, pada tahun 2012, Guure, *et al*.

membandingkan kinerja estimator maksimum *likelihood* dan estimator Bayes menggunakan perluasan informasi *prior* Jeffrey. Hasil menunjukkan bahwa estimator Bayes menggunakan perluasan *prior* Jeffrey dengan *linear exponential loss function* dalam kebanyakan kasus memberikan *mean square error* (MSE) terkecil.

Berdasarkan hal yang telah diuraikan dan keterkaitan penelitian sebelumnya, pada artikel ini dibahas model regresi linier sederhana *bayesian* dengan *prior* noninformatif Jeffrey.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan artikel ini adalah studi literatur, dengan mengumpulkan referensi berupa jurnal, artikel, dan buku yang dapat mendukung pembahasan tentang estimasi parameter regresi linier sederhana dengan metode *bayesian prior* noninformatif. Distribusi *prior* yang dipergunakan adalah distribusi normal dan metodenya adalah Jeffrey.

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah menguraikan regresi linier sederhana dengan metode *bayesian prior* noninformatif, menggunakan distribusi normal untuk mengestimasi parameter regresi linier sederhana dengan metode *bayesian prior* noninformatif, menentukan fungsi *likelihood* dari variabel random. Selanjutnya, menentukan distribusi *prior* menggunakan Jeffrey, menentukan distribusi *posterior*, dan menentukan estimasi parameter regresi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini diuraikan tentang model regresi linier sederhana, metode *bayesian*, model regresi linier sederhana *bayesian prior* noninformatif, dan estimasi parameter model tersebut.

A. *Model Regresi Linier Sederhana*

Model regresi linier berdasarkan banyaknya variabel bebas dibagi menjadi dalam 2 tipe model yaitu model regresi linier ganda dan model regresi linier sederhana. Model regresi linier ganda adalah model regresi yang memiliki dua atau lebih variabel bebas. Model regresi linier sederhana adalah model regresi dengan satu variabel bebas dan 1 variabel tak bebas. Model regresi linier dipergunakan untuk memperoleh hubungan linier antara satu variabel bebas dan satu variabel tak bebas. Model regresi linier sederhana ditulis sebagai

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

dengan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, Y merupakan variabel tak bebas, X merupakan variabel bebas, dan β_0, β_1 adalah parameter regresi. Linier menunjukkan bahwa model tersebut linier dalam parameter β_0, β_1.

B. *Probabilitas Bersyarat, Metode Bayesian dan Fungsi Likelihood.*

Pengertian tentang probabilitas bersyarat dan fungsi *likelihood* yang diberikan pada artikel ini diambil dari (Bain and Engelhardt, 1992). Probabilitas bersyarat adalah peluang kejadian dari A jika diketahui B telah terjadi yang ditulis sebagai $P(A|B)$. Misal dipunyai ruang sampel *S* dan *A*, *B* adalah peristiwa didalam *S*. Probabilitas *A* dengan syarat *B* didefinisikan,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{dengan} P(B) \neq 0$$

Dasar metode bayesian adalah probabilitas bersyarat sehingga untuk melakukan pendugaan parameter diperlukan informasi awal parameter yang disebut distribusi *prior*. Fungsi *likelihood* adalah fungsi densitas probabilitas bersama dari *n* variabel random. Misal $T_1, T_2, \dots, T_n$ adalah variabel random dengan pengamatannya adalah $t_1, t_2, \dots, t_n$, fungsi *likelihood* dapat ditulis dengan $f(t_1, t_2, \dots, t_n; \theta)$. Untuk nilai $t_1, t_2, \dots, t_n$ tertentu, fungsi *likelihood* merupakan fungsi θ ditulis dengan $L(\theta)$. Jika $T_1, T_2, \dots, T_n$ adalah variabel random yang independen, maka

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \theta) = f(t_1; \theta), f(t_2; \theta), \dots, f(t_n; \theta)$$

dengan θ adalah parameter yang tidak diketahui.

Pada penelitian ini, digunakan distribusi *prior* normal dengan fungsi densitas probabilitasnya ditulis sebagai

$$f(X;\ \theta; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\theta}{\sigma}\right)^2\right] \tag{1}$$

Berdasarkan persamaan (1) ditentukan fungsi *likelihood*-nya. Fungsi *likelihood* dengan variabel random berdistribusi normal, $X_i \sim N(\theta; \sigma^2)$ adalah

$$L(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta; \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (2\pi\,\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \theta)^2\right]$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right]$$
$$\propto (\sigma)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right]$$

C. *Distribusi Prior Noninformatif*

Salah satu pendekatan distribusi *prior* noninformatif adalah metode Jeffrey (Al-Kutubi and Ibrahim, 2009). Metode ini menyatakan bahwa distribusi *prior* $f(\theta)$ merupakan akar kuadrat dari informasi Fisher yang ditulis sebagai $f(\theta) = [I(\theta)]^{\frac{1}{2}}$ dengan $I(\theta)$adalah informasi Fisher. Menurut (Bain and Engelhardt, 1992), informasi Fisher ditulis sebagai

1.1

$$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]$$

Jika $\vartheta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)^t$ adalah vektor digunakan $f(\vartheta) = [\det I(\vartheta)]^{\frac{1}{2}}$ dengan $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ adalah matriks informasi Fisher berordo (*p*x*p)*. Informasi Fisher tersebut adalah

$$I_{ij}(\vartheta) = -E_\vartheta\left[\frac{\partial^2 \log f(x;\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$$

dengan $i = 1,2,\ldots,p$ dan $j = 1,2,\ldots,p$.

Prior noninformatif distribusi normal, $f(\vartheta)$ dengan $\vartheta = (\theta, \sigma^2)$, diasumsikan θ dan σ^2 adalah independen sehingga berlaku $f(\vartheta) = f(\theta)f(\sigma^2)$. Selanjutnya, ditentukan distribusi *prior* noninformatif $f(\sigma^2)$, langkah penentuannya sebagai berikut.

1. Pada proses perhitungan, dimisalkan $u = \sigma^2$ sehingga $f(X;\theta,\sigma^2) = f(X;\theta,u)$. dengan $f(X_i;\ \theta;\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma}\right)^2]$
2. Untuk penyederhanaan perhitungan, persamaan (1) ditransformasikan dengan fungsi *ln*, dengan hasil berikut.
$$ln\, f(X;\theta,u) = -\frac{1}{2} ln\, 2\pi - \frac{1}{2} ln\, u - \frac{(X-\theta)^2}{2u}. \quad (2)$$
3. Persamaan (2), diturunkan terhadap σ^2, diperoleh
$$\frac{d\, log\, f(X;\theta,u)}{du} = -\frac{1}{2u} + \frac{(X-\theta)^2}{2u^2}. \quad (3)$$

4. Turunan ke-2 persamaan (3) adalah
$$\frac{d^2\, log\, f(X;\theta,u)}{du^2} = \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(X-\theta)^2}{2\sigma^6}. \tag{4}$$
5. Informasi Fisher untuk persamaan (4) adalah
$$I(u) = -E\left[\frac{d^2 \log f(X;\theta,u)}{du^2}\right] = \frac{1}{2\sigma^4}.$$

Dengan metode Jeffrey diperoleh bahwa *prior* noninformatifnya adalah

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\sigma^2) \\ &= \sqrt{I(\sigma^2)} \\ &\propto \frac{1}{\sigma^2} \end{aligned}$$

dan *prior* noninformatif untuk $f(\theta) = c$ (konstan). Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= f(\theta)f(\sigma^2) \\ &= c \times \frac{1}{\sigma^2} = \frac{c}{\sigma^2} \\ &\propto \frac{1}{\sigma^2} \end{aligned}$$

D. *Distribusi Posterior*

Menurut (Larson, 1974) fungsi densitas *posterior* untuk θ merupakan fungsi densitas probabilitas bersyarat θ dengan sampel pengamatan *x* ditulis sebagai

$$f(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)}{f(x)}.$$

Parameter sampel dapat berasal dari distribusi variabel random diskrit maupun kontinu. Apabila diberikan suatu sampel random $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dengan parameter θ, probabilitas *posterior*-nya adalah

$$f(\theta|X) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) f(\theta)}{\int_{i=1}^{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) f(\theta) d(\theta)}$$

$$f(\theta|X) \propto (likelihood) \text{ x } (prior)$$

Apabila distribusi *prior*-nya berdistribusi normal, distribusi *posterior* untuk distribusi normal ditulis sebagai

$$f(\theta, \sigma^2|x) \propto \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^{n+2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\theta)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^{n+2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{(n-1)s^2 + n(\bar{x}-\theta)^2\}\right]$$

dengan $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

Untuk memperoleh distribusi *posterior* marginal untuk σ^2, distribusi *posterior* $f(\theta,\sigma^2|x)$ dan diperoleh

$$f(\sigma^2|x) \propto \int \frac{1}{\sigma^{n+2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{(n-1)s^2 + n(\bar{x}-\theta)^2\}\right] d\theta$$

$$\propto \frac{1}{\sigma^{n+2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(n-1)s^2\right)\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}$$

$$\propto (\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)$$

yang merupakan fungsi densitas untuk *invers* χ^2 berskala, atau dapat ditulis sebagai

$$f(\sigma^2|x) \sim Inv - \chi^2(n-1, s^2).$$

Fungsi densitas untuk distribusi invers-χ^2 berskala memiliki fungsi densitas yang sama dengan distribusi $Inv - gamma(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}s^2)$ (Gelman,*et al*, 2004).

Untuk memperoleh distribusi *posterior* marginal untuk θ, distribusi *posterior* $f(\theta,\sigma^2|x)$ diintegralkan terhadap σ^2, diperoleh

$$f(\theta|x) \propto \int \frac{1}{\sigma^{n+2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{(n-1)s^2 + n(\bar{x}-\theta)^2\}\right] d\sigma^2$$

$$= \frac{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{-1}}{\beta\left(\frac{(n-1)}{2}, \frac{1}{2}\right)\sqrt{(n-1)}}\left[1 + \frac{n(\theta-\bar{x})^2}{(n-1)s^2}\right]^{-\frac{1}{2}((n-1)+1)}$$

Jika $t = \frac{(\bar{x}-\theta)}{s/\sqrt{n}}$ maka $f(\theta|x) \sim t(n-1)$.

E. *Estimasi Parameter Model Regresi Linier Sederhana Bayesian dengan Distribusi Prior Noninformatif*

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel random dari distribusi normal dengan mean θ dan variansi σ^2. Dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* dapat dicari estimator titik untuk θ dan σ^2. Fungsi densitasnya adalah:

$$f(X_i;\ \theta; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\theta}{\sigma}\right)^2]$$

Fungsi *likelihood*:

$$L(\theta,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta;\sigma^2)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (2\pi\,\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2\right]$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right]$$

Log *likelihood*:

$$l = \log[L(\theta,\sigma^2)]$$
$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

Estimasi parameter untuk $\hat{\theta}$

$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = 0 - 0 - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2x_i\theta + \theta^2\right)$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\times\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}2x_i\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}(n\theta^2)\right]$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\times\left[0 - \sum_{i=1}^{n}2x_i + 2n\theta\right]$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} - \frac{n\theta}{\sigma^2}$$

maka estimasi parameter $\hat{\theta}$ adalah

$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = 0$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} - \frac{n\theta}{\sigma^2} = 0$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} = \frac{n\theta}{\sigma^2}$$
$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Estimasi parameter untuk $\widehat{\sigma^2}$

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma^2} = 0 - \frac{n}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)$$

maka estimasi parameter $\widehat{\sigma^2}$ adalah

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$-\frac{n}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2\right) = \frac{n}{\sigma^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2\right) = n$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2}{n}$$

Jadi diperoleh estimasi parameter untuk $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ dan $\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{n}$

Sedangkan secara komputasi, salah satu metode komputasi yang digunakan untuk menduga parameter adalah metode *Markov Chain* Monte Carlo (MCMC). MCMC merupakan salah satu teknik untuk menentukan dugaan parameter model regresi *bayesian* yang penyelesaian analitiknya sulit ditentukan. Terdapat tiga macam metode MCMC yaitu metode Metropolis, metode Metropilis-Hasting, dan metode Gibbs Sampler. Metode Gibbs Sampler merupakan metode yang sering digunakan dalam metode *bayesian.* Pada penelitian ini dipergunakan metode Gibss Sampler yang algoritmenya dinyatakan sebagai berikut.

1. Menentukan nilai awal $\beta^{(0)}$.
2. Untuk iterasi *t=1,...,T*, dilakukan langkah berikut.
   (a). Mengatur $\beta = \beta^{(t-1)}$.
   (b). Untuk *j=0,...,k,*membangkitkan β_j distribusi *posterior.*
   (c). Membangkitkan $\beta_0^{(t)}$ dari $f(\beta_0|\beta_1^{(t-1)}, \beta_2^{(t-1)}, \dots, \beta_k^{(t-1)}, x)$
   membangkitkan$\beta_1^{(t)}$ dari $f(\beta_1|\beta_0^{(t)}, \beta_2^{(t-1)}, \dots, \beta_k^{(t-1)}, x)$
   membangkitkan $\beta_2^{(t)}$ dari $f(\beta_2|\beta_0^{(t)}, \beta_1^{(t)}, \dots, \beta_k^{(t-1)}, x)$
   membangkitkan $\beta_k^{(t)}$ dari $f(\beta_k|\beta_1^{(t)}, \beta_2^{(t)}, \dots, \beta_{k-1}^{(t)}, x)$

Berdasarkan iterasi tersebut dapat dilihat apakah *trace* plot sudah konvergen, apabila belum konvergen diperlukan tambahan iterasi hingga konvergen.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh simpulan berikut.

1. Salah satu pendekatan distribusi *prior* noninformatif untuk distribusi normal menggunakan metode Jeffrey, nilai *prior* noninformatifnya adalah
$$f(\vartheta) \propto \frac{1}{\sigma^2}.$$
2. Distribusi *posterior* marginal untuk distribusi normal pada model regresi linier sederhana *bayesian* dengan distribusi *pior* noninformatif adalah
$$f(\sigma^2|x) \sim \text{Inv-}\chi^2(n-1, s^2)$$
$$f(\theta|x) \sim t(n-1)$$
3. Estimasi parameter model regresi linier sederhana *bayesian* dengan distribusi *prior* noninformatif adalah
$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{n}.$$

DAFTAR PUSTAKA

Al-Kutubi, H. S., Ibrahim N. A. (2009). *Bayes Estimator for Exponential Distribution with Extension of Jeffery Prior Information*. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 3(2),297-313.

Bain, L. J. and Engelhardt, M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics,* second ed., Buxbury Press, Inc., California.

Bolstad, W. M. (2007). *Introduction to Bayesian Statistics*, 2nd ed. New Jersey: Wiley.

Box, G. E. P., Tiao, G. C. (2007). *Bayesian Inference in Statistics*, 2nd ed, New Jersey: Wiley.

Casella, G. and Berger, R. L. (2002). Statistical Inference, Second Ed., Thomson Learning, Duxbury, p: 435-440.

Gelman, A., Carlin John, B., Stern Hal, S., and Rubin Donald, B. (2004). *Bayesian Data Analysis*, 2nd ed, New York: Chapman & Hall.

Guure, C. B., Ibrahim, N. A. & Ahmed, A. O. M. (2012). *Bayesian Estimation of Two Parameter Weibull Distribution Using Extension of Jeffrey's Prior Information with Three Loss Functions*. Mathematical Problems in Engineering.

Larson, H. J. (1974). *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference.* John Wiley and Sons, Inc., New York.

Nurlaila, D., Kusnandar, D. dan Sulistianingsih, E. (2013). Perbandingan Metode Maximum *Likelihood Estimation* (MLE) dan Metode Bayes dalam Pendugaan Parameter Distribusi Eksponensial. Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster) Volume 02, No. 1 hal. 51 – 56.

Sembiring, R. K. (1995). *Analisis Regresi*, ITB, Bandung.

Soejoeti, Z. dan Subanar. (1988). *Inferensi Bayesian*, Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.

Walpole, R. E. and Myers, R. H. (1995). Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan, Penerbit ITB, Bandung.