Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika *ISBN: 978-602-6122-20-9*
hal 1025-1034 November 2016 *http://jurnal.fkip.uns.ac.id*

REPRESENTASI INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN FRAKSIONAL

Chatarina Enny Murwaningtyas[1,2], Sri Haryatmi[1], Gunardi[1], Herry Pribawanto Suryawan[2]

[1]Universitas Gadjah Mada
[2]Universitas Sanata Dharma
enny@usd.ac.id

Abstrak: Gerak Brown fraksional adalah proses stokastik yang merupakan pengembangan dari gerak Brown standar. Gerak Brown fraksional merupakan bentuk umum dari gerak Brown dengan menambahkan satu parameter Hurst (H). Perumuman ini mengakibatkan beberapa sifat yang ada di dalam gerak Brown sudah tidak berlaku lagi. Pada makalah ini akan dibahas representasi integral stokastik untuk gerak Brown fraksional. Berdasarkan Mandelbrot dan Van Ness (1968) gerak Brown dapat didefinisikan dalam bentuk integral stokastik. Selain memaparkan tentang definisi integral stokastik berdasarkan Mandelbrot dan Van Ness, akan ditujukkan juga memenuhi sifat kovariansi dari proses gerak Brown fraksional.

Kata kunci: Gerak Brown Fraksional, Integral Stokastik

PENDAHULUAN

Pada tahun 1940, gerak Brown fraksional diperkenalkan oleh Kolmogorov untuk yang pertama kali dalam kerangka ruang Hilbert, yang diberi nama Wiener Helix. Selanjutnya pada tahun 1968, Mandelbrot dan Van Ness memperkenalkan proses tersebut dengan nama gerak Brown fraksional (*Fractional Brownian Motion* atau FBM). Dalam makalah Mandelbrot dan Van Ness (1968) telah dibuktikan repersentasi integral stokastik pada proses gerak Brown standar.

Gerak Brown fraksional merupakan teori pengembangan dari teori *Brownian Motion* atau lebih dikenal Gerak Brown. Perumuman dari gerak Brown ini mempunyai banyak sifat menarik yang tidak dimiliki oleh gerak Brown sehingga menjadi model yang lebih realistis untuk banyak aplikasi di berbagai cabang ilmu misalnya matematika keuangan, fisika polimer, hidrologi, jaringan telekomunikasi dan sebagainya. Beberapa sifat menariknya antara lain *self-similarity*, *stationary increment*, *long-range dependent*, kekontinuan Hölder dari lintasan sampel, dan sifat non-Markov.

Pada matamatika keuangan, model gerak Brown geometrik mengasumsikan bahwa *return* saham berdistribusi normal, stasioner dan saling bebas. Pada kenyataannya harga saham cukup banyak yang tidak saling bebas dalam rentang yang pendek (*short memory*) atau dalam rentang yang panjang (*long memory*). Model yang bisa mengatasi hal itu adalah gerak brown fraksional. Gerak brown fraksional pertama kali dikenalkan oleh Mandelbrot dan Van Ness (1968).

Dalam perkembangan teori gerak Brown fraksional, terdapat beberapa definisi representatif integral gerak Brown fraksional. Pada tulisan ini akan menggunakan definisi gerak Brown fraksional yang dipresentasikan pertama kali sebagai rata-rata bergerak dari increments Brownian yang diperkenalkan oleh Mandelbrot dan Van Ness (1968).

HASIL DAN PEMBAHASAN

GERAK BROWN FRAKSIONAL

Sebelum membahas definisi gerak Brown fraksional, terlebih dahulu akan dikenalkan notasi yang digunakan yaitu :

$$(x)_+^y = \begin{cases} x^y & \text{jika } x \geq 0 \\ 0 & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Jika H suatu konstanta di dalam interval (0,1), berdasarkan Rostek (2009), gerak Brown fraksional $\{B^{(H)}(t), t \in \mathbb{R}\}$ adalah proses stokastik yang didefinisikan sebagai berikut

$$B^{(H)}(0) = 0 \tag{1}$$

$$B^{(H)}(t) = c_H \left[\int_{\mathbb{R}} \left((t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(s) \right] \tag{2}$$

dengan $\{B^{(H)}(t), t \in \mathbb{R}\}$ adalah gerak Brown standar, H dikatakan sebagai parameter Hurst dan

$$c_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(\frac{1}{2} + H)\Gamma(2 - 2H)}} \tag{3}$$

adalah konstanta normalitas dengan Γ adalah fungsi gamma. Berdasarkan definisi diatas, untuk $t > 0$ maka $B^{(H)}(t)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$B^{(H)}(t) = c_H \left[\int_{-\infty}^{0} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(s) + \int_{0}^{t} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(s) \right] \tag{4}$$

Dipilih nilai parameter spesial $H = \frac{1}{2}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
B^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t) &= c_{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{0}\left((t-s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}-(-s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right)dB(s)+\int_{0}^{t}\left((t-s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right)dB(s)\right] \\
&= c_{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{0}\left((t-s)^{0}-(-s)^{0}\right)dB(s)+\int_{0}^{t}\left((t-s)^{0}\right)dB(s)\right] \\
&= c_{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(1-1\right)dB(s)+\int_{0}^{t}\left(1\right)dB(s)\right] \\
&= c_{\frac{1}{2}}\int_{0}^{t}dB(s) \\
&= B(t)
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
c_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(2-2\cdot\frac{1}{2})}} \\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)\Gamma(1)}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan diperlihatkan apakah nilai harapan gerak Brown fraksional sama dengan 0. Berdasarkan definisi gerak Brown pada (2), terlihat bahwa gerak Brown fraksional bergantung dengan gerak Brown standar, sedangkan nilai harapan dari gerak Brown standar adalah 0. Jadi berakibat nilai harapan dari gerak Brown fraksional juga sama dengan 0, atau dapat dituliskan

$$\mathrm{E}[B^{(H)}(t)] = 0 \text{ untuk semua } t \geq 0$$

Dalam beberapa artikel yang membahas tentang gerak Brown fraksional, proses stokastik tidak didefinisikan melalui integral representasi melainkan klasifikasi gerak Brown didasarkan pada sifat kovariasinya yaitu tergambar dalam definisi berikut.

Definisi 1.

Misalkan *H* suatu konstanta di dalam interval (0,1). Gerak Brown fraksional $(B^{(H)}(t))_{t\geq 0}$ dari indeks Hurst *H* adalah proses Gaussian terpusat dengan fungsi kovarian

$$\mathrm{E}\left[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|\,t-s\,|^{2H}\right) \tag{5}$$

Sehingga tertarik untuk membuktikan bahwa definisi gerak Brown berdasarkan (2) juga memiliki sifat (5). Untuk pembuktian ini diperlukan Lemma yang akan dibahas di sub bab berikutnya, sehingga bukti ini akan dibahas kemudian.

Gerak Brown fraksional adalah proses *self similar* yang berarti bahwa untuk setiap $\alpha > 0,$ variabel random $B^{(H)}(\alpha t)$ mempunyai hukum probabilitas sama dengan $\alpha^H B^{(H)}(t).$ Konstanta H menentukan tanda dari kovarian *increments* gerak Brown fraksional. Jika $H > \frac{1}{2}$ maka kovariannya positif dan jika $H < \frac{1}{2}$ maka kovariannya negatif. Sifat lain dari gerak Brown fraksional adalah jika $H > \frac{1}{2}$ maka prosesnya bersifat*long memory* dan jika $H < \frac{1}{2}$ maka kovariannya prosesnya bersifat *sort memory*. Sifat *self similar* dan *long memory* menjadikan gerak Brown fraksional suatu alat yang sesuai untuk penerapan dalam matematika keuangan. Hal ini disebabkan karena ada harga saham yang memiliki sifat *long memory*.

INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN FRAKSIONAL

Ditentukan suatu konstanta Hurst H dengan $\frac{1}{2} < H < 1.$ Berdasarkan Biagini, Hu, Øksendal, dan Zhang (2008) didefinisikan

$$\phi(s,t) = H(2H-1)\,|\,t-s\,|^{2H-2} \qquad \text{dengan } s,t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Dan untuk $s,t > 0,$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^s \phi(u,v)\,du\,dv &= \int_0^t\int_0^s H(2H-1)\,|\,u-v\,|^{2H-2}\,du\,dv \\
&= \int_0^t \left(H\,|\,u-v\,|^{2H-1}\Big|_0^s \right) dv \\
&= \int_0^t \left(H\,|\,s-v\,|^{2H-1} - H\,|-v\,|^{2H-1} \right) dv \\
&= \int_0^t \left(H\,|\,s-v\,|^{2H-1} - H\,|\,v\,|^{2H-1} \right) dv \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}\,|\,s-v\,|^{2H-1} + \tfrac{1}{2}\,|\,v\,|^{2H} \right)\Big|_0^t \\
&= -\tfrac{1}{2}\,|\,s-t\,|^{2H-1} + \tfrac{1}{2}\,|\,s\,|^{2H-1} + \tfrac{1}{2}\,|\,t\,|^{2H} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(|\,s\,|^{2H-1} + |\,t\,|^{2H} - |\,s-t\,|^{2H-1} \right)
\end{aligned}$$

Misalkan $S(\mathbb{R})$ adalah ruang Schwartz dari fungsi mulus yang menurun dengan cepat pada $\mathbb{R}$, dan $f \in S(\mathbb{R})$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$| f |_{\phi}^{2} := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s) f(t)\phi(s,t)dsdt < \infty \tag{7}$$

Jika ruang $S(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan hasil kali dalam (*inner product*) berikut

$$\langle f, g\rangle_{\phi} := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\phi(s,t)dsdt \tag{8}$$

dengan $f, g \in S(\mathbb{R})$, maka ruang $S(\mathbb{R})$ dapat dinotasikan dengan $L_{\phi}^{2}(\mathbb{R})$, menjadi ruang Hilbert separabel. Jadi $\left(L_{\phi}^{2}(\mathbb{R}), \langle \cdot,\cdot\rangle\right)$ adalah ruang Hilbert.

Jika $f \in L_{\phi}^{2}(\mathbb{R})$, didefinisikan

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t) := \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dB^{(H)}(t) \tag{9}$$

dengan

$$f_n(t) = \sum_i a_i^n \mathrm{I}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \to f(t)$$

$$\mathrm{I}_{[t_i,t_{i+1})}(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

dan

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dB^{(H)}(t) := \sum_i a_i^n \left(B^{(H)}(t_{i+1}) - B^{(H)}(t_i)\right) \tag{10}$$

Secara umum definisi dari integral stokastik relatif terhadap gerak Brown fraksional dapat diberikan menggunakan representasi integral dari gerak Brown fraksional pada Persamaan (2). Untuk menyederhanakannya, dibatasi pada suatu integran yang deterministik. Untuk $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t) = c_H\left(H - \tfrac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\tau}^{\infty}(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(t)dt\right)dB(\tau) \tag{11}$$

dengan c_H didefinisikan berdasarkan (3)

Lemma 2

Jika $f(t) = \mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)$ dengan

$$\mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t \in (-\infty, s] \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

maka (2) identik dengan Persamaan (11).

Bukti :

$$
\begin{aligned}
B^{(H)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)\,dB^{(H)}(t) \\
&= c_H (H-\tfrac{1}{2}) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\tau}^{\infty} (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} \mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)\,dt \right) dB(\tau) \\
&= c_H (H-\tfrac{1}{2}) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\tau}^{s} (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} dt + \int_{\tau}^{0} (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} dt \right) dB(\tau) \\
&= c_H \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\tau}^{s} (H-\tfrac{1}{2})(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} dt + \int_{\tau}^{0} (H-\tfrac{1}{2})(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} dt \right) dB(\tau) \\
&= c_H \int_{\mathbb{R}} \left((t-\tau)^{H-\frac{1}{2}} \Big|_{\tau}^{s} + (t-\tau)^{H-\frac{1}{2}} \Big|_{\tau}^{0} \right) dB(\tau) \\
&= c_H \int_{\mathbb{R}} \left((s-\tau)^{H-\frac{1}{2}} - (\tau-\tau)^{H-\frac{1}{2}} + (\tau-\tau)^{H-\frac{1}{2}} - (-\tau)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(\tau) \\
&= c_H \int_{\mathbb{R}} \left((s-\tau)^{H-\frac{1}{2}} - (-\tau)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(\tau)
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti jika $f(t) = \mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)$ maka (2)identik dengan Persamaan (11)

Lemma 3

Misalkan

$$
I_{-}^{h-1/2}\left(f(u) \right) = c_H (H-\tfrac{1}{2}) \int_{u}^{\infty} (t-u)^{H-3/2} f(t)\,dt
$$

dengan c_H didefinisikan berdasarkan (3)dan Γ menotasikan fungsi gamma. Maka $I_{-}^{H-1/2}$ adalah suatu isometri dari $L_{\phi}^{2}(\mathbb{R})$ ke $L^{2}(\mathbb{R})$.

Bukti :

Menggunakan definisi fungsi gamma dan fungsi beta maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\min(s,t)} \left((t-u)^{H-\frac{3}{2}} (s-u)^{H-\frac{3}{2}} \right) du &= \int_{0}^{\infty} \left((t-(s-v))^{H-\frac{3}{2}} (s-(s-v))^{H-\frac{3}{2}} \right) dv \\
&= \int_{0}^{\infty} \left((t-s+v)^{H-\frac{3}{2}} v^{H-\frac{3}{2}} \right) dv \\
&= \int_{0}^{\infty} \left((t-s+(t-s)w)^{H-\frac{3}{2}} ((t-s)w)^{H-\frac{3}{2}} \right) (t-s)\,dw \\
&= \int_{0}^{\infty} (t-s)^{2H-3} \left((1+w)^{H-\frac{3}{2}} w^{H-\frac{3}{2}} \right) (t-s)\,dw \\
&= \int_{0}^{\infty} (t-s)^{2H-2} \left((1+w)^{H-\frac{3}{2}} w^{H-\frac{3}{2}} \right) dw
\end{aligned}
$$

$$\int_{-\infty}^{\min(s,t)}\left((t-u)^{H-\frac{3}{2}}(s-u)^{H-\frac{3}{2}}\right)du = |t-s|^{2H-2}\int_0^\infty\left((1+w)^{H-\frac{3}{2}}w^{H-\frac{3}{2}}\right)dw$$

$$= |t-s|^{2H-2}\int_0^\infty\left(\frac{w^{\left(H-\frac{1}{2}\right)-1}}{(1+w)^{\frac{3}{2}-H}}\right)dw$$

$$= |t-s|^{2H-2}\int_0^\infty\left(\frac{w^{\left(H-\frac{1}{2}\right)-1}}{(1+w)^{\left(H-\frac{1}{2}\right)+(2-2H)}}\right)dw$$

$$= |t-s|^{2H-2}\, B\left(\left(H-\tfrac{1}{2}\right),\left(2-2H\right)\right)$$

$$= |t-s|^{2H-2}\,\frac{\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2-2H\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}$$

$$= |t-s|^{2H-2}\,\frac{2H}{c_H^2(H-\frac{1}{2})} \qquad (12)$$

Diasumsikan*f* dan *g* adalah fungsi kontinu yang kompak. Berdasarkan definisi diatas maka menggunakan (12)diperoleh

$$\left\langle I_-^{h-1/2}f(u), I_-^{h-1/2}g(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \left\langle c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_u^\infty(s-u)^{H-3/2}f(s)ds,\, c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_u^\infty(t-u)^{H-3/2}g(t)dt\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left\{c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_u^\infty(s-u)^{H-3/2}f(s)ds\,c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_u^\infty(t-u)^{H-3/2}g(t)dt\right\}du$$

$$= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_u^\infty(s-u)^{H-3/2}f(s)ds\int_u^\infty(t-u)^{H-3/2}g(t)dt\right\}du$$

$$= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\left\{\int_{-\infty}^{\min\{s,t\}}(s-u)^{H-3/2}(t-u)^{H-3/2}du\right\}dsdt$$

$$= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\left\{|t-s|^{2H-2}\,\frac{2H}{c_H^2(H-\frac{1}{2})}\right\}dsdt$$

$$= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)2H(H-\tfrac{1}{2})|t-s|^{2H-2}dsdt$$

$$= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)H(2H-1)|t-s|^{2H-2}dsdt$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\phi(s,t)dsdt$$

Jadi terbukti $I_-^{H-1/2}$ adalah suatu isometri dari $L_\phi^2(\mathbb{R})$ ke $L^2(\mathbb{R})$.

Lemma 4

Jika $f, g \in L_\phi^2(\mathbb{R})$ maka $\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t)$ dan $\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^{(H)}(s)$ terdefinisi dengan baik (*well-defined*) dengan rata-rata nol, variabel random Gaussian dengan variansi $|f|_\phi^2$ dan $|g|_\phi^2$ dan

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t)\int_{\mathbb{R}} g(s)dB^{(H)}(s)\right) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(s)\phi(s,t)dsdt \\ &= \langle f, g\rangle_\phi \end{aligned} \tag{13}$$

Bukti :
Menggunakan (11) dan (12) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^{(H)}(s)\int_{\mathbb{R}} g(t)dB^{(H)}(t)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_{\mathbb{R}}\left(\int_\tau^\infty (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(s)ds\right)dB(\tau)\right. \\
&\qquad \left. c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_{\mathbb{R}}\left(\int_\tau^\infty (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} g(t)dt\right)dB(\tau)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_\tau^\infty (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(s)ds\right)dB(\tau)\right. \\
&\qquad \left. \int_{\mathbb{R}}\left(\int_\tau^\infty (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} g(t)dt\right)dB(\tau)\right] \\
&= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\,\mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_\tau^\infty (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(s)ds\right)dB(\tau)\right. \\
&\qquad \left. \int_{\mathbb{R}}\left(\int_\tau^\infty (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} g(t)dt\right)dB(\tau)\right] \\
&= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2 \times \\
&\quad \mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(f(s)g(t)\left(\int_{-\infty}^{\min(t,s)} (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}}(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} dB(\tau)dB(\tau)\right)\right)dsdt\right] \\
&= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(f(s)g(t)\left(\int_{-\infty}^{\min(t,s)} (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}}(s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} d\tau\right)\right)dsdt \\
&= c_H^2(H-\tfrac{1}{2})^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(f(t)g(s)\left(|t-s|^{2H-2}\frac{2H}{c_H^2(H-\frac{1}{2})}\right)\right)dsdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^{(H)}(s)\int_{\mathbb{R}} g(t)dB^{(H)}(t)\right] &= 2H(H-\tfrac{1}{2})\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\,|t-s|^{2H-2}\,dsdt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)H(2H-1)\,|t-s|^{2H-2}\,dsdt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\phi(t,s)dsdt \\
&= \langle f,g\rangle_\phi
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^{(H)}(s)\int_{\mathbb{R}} g(t)dB^{(H)}(t)\right] = \langle f,g\rangle_\phi$.

Lemma 5

Jika gerak Brown fraksional didefinisikan sesuai dengan Mandelbrot dan Van Ness (1968) yaitu yang tertuang dalam (2), maka korelasi dari gerak Brown fraksional memunuhi sifat (5) berikut

$$\mathrm{E}[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$$

Bukti :

Jika $f(u) = \mathrm{I}_{[0,t]}$ dan $g(v) = \mathrm{I}_{[0,s]}$ dan menggunakan Lemma 2 dan Lemma 4 maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[B_t^H B_s^{(H)}\right] &= \mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{[0,t]}(u)dB^{(H)}(u)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{[0,s]}(v)dB^{(H)}(v)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{[0,t]}(u)\mathrm{I}_{[0,s]}(v)\phi(u,v)dudv \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{[0,t]}(u)\mathrm{I}_{[0,s]}(v)H(2H-1)\,|u-v|^{2H-2}\,dudv \\
&= H(2H-1)\int_0^s\int_0^t |u-v|^{2H-2}\,dudv \\
&= H(2H-1)\int_0^s\left(\int_0^v (v-u)^{2H-2}du + \int_v^t (u-v)^{2H-2}du\right)dv \\
&= H\int_0^s\left(\left[-(v-u)^{2H-1}\right]_0^v + \left[(u-v)^{2H-1}\right]_v^t\right)dv \\
&= H\int_0^s\left(v^{2H-1} + (t-v)^{2H-1}\right)dv \\
&= \frac{1}{2}\left[v^{2H} - (t-v)^{2H}\right]_0^s
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\left[B_t^H B_s^{(H)}\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\right)$$

Jadi terbukti jika gerak Brown fraksional didefinisikan sesuai dengan Mandelbrot dan Van Ness (1968) yaitu yang tertuang dalam (2), maka korelasi dari gerak Brown fraksional memunuhi (5).

SIMPULAN

Representasi gerak Brown fraksional yang tertuang dalam (2) merupakan bentuk integral stokastik dari gerak Brown. Tujuan dalam makalah ini adalah menjabarkan tentang representasi integral gerak Brown fraksional yang diperkenalkan oleh Mandelbrot dan Van Ness (1968). Selain itu ditunjukkan bahwa representasi dalam (2) memenuhi sifat kovariansi gerak Brown fraksional pada (5). Dan hal ini tertuang dalam Lemma 5.

DAFTAR PUSTAKA

Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., & Zhang, T. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*: Springer.

Mandelbrot, B. B., & Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review, 10*(4), 422-437.

Rostek, S. (2009). *Option Pricing in Fractional Brownian Markets*: Springer-Verlag Berlin.